THE GRAND CALCULUS

项目史、编辑方法与范围

关于 G. M. 菲赫金哥尔茨《微积分学教程》
完整现代化英文版的文献性论文

生平 • 原著出版史 • $7+1$ 卷本的范围
原著与现代化版本比较 • 完整编辑序言

Maksim Sokolov
译者兼编辑
加拿大多伦多 • 2026

MAXERGON
POWERED BY CENTURIES

Maxergon School 出版

The Grand Calculus：项目史、编辑方法与范围

关于 G. M. 菲赫金哥尔茨《微积分学教程》完整现代化英文版的文献性论文

版权所有 © 2026 Maksim Sokolov 与 Maxergon School。 保留所有权利。本声明适用于本文以及其中原创的编辑文字、汇编、排版和设计。适用于各册图书本身的版权与地域声明已在本文正文中原样收录。 本文由译者兼编辑收录核心各卷的完整《译者序》及第八卷的完整《引言》；其英文文本的版权归该译者兼编辑所有。 **存储库收录范围**

本文件是关于该项目的原创文献性文章。它不包含八卷图书的完整内容，也不表示托管本文件的存储库对该项目作出认可或背书。

版本说明

Archive 文章，2026 年 8 月。本文报告的书目信息、比较结果和量化规模，均已依据八卷本的最终 LaTeX 源文件核查。代表性比较还对照了数字化俄文版。涉及外部史实的陈述均在文献来源注释中说明依据。 数字存储库建议文件名：

`the-grand-calculus-project-article-chinese-simplified.pdf`

目录

项目概览 **1**
摘要 1
项目概况 1
菲赫金哥尔茨：献身分析学的一生 1
从战前规划到战后《教程》 2
同时代的评价 2
规模、内容与国际传播 3
新版的贡献 3
原著与现代化版本比较的依据 4
从三卷俄文版到七卷核心版 4
现代化处理改变了什么，又保留了什么 5
代表性比较：现代化处理的实际做法 5
作者与编辑责任 6
7+1 卷本的架构 7
习题配套卷详述 7
重新制作的数学图形 7
全套书的使用方式 10
权利、地域与获取 10

第二部分：完整《译者序》 **11**

译者序 **12**
关于“The Grand Calculus” 12
原《教程》及其影响 12
使用建议 13
翻译方法 13
现代化处理的范围 14
技术与编辑责任 14
发行地域 14
致谢 14
八卷内容 15

第三部分：第 8 卷完整《引言》 **17**

第 8 卷引言 **18**
习题配套卷 18
本卷的编排方式 18
发行地域 18

关于译者兼编辑 **19**

参考文献与来源说明选录 **20**

项目概览

摘要

The Grand Calculus 是一项于 2026 年出版的英文项目，以格里戈里·米哈伊洛维奇·菲赫金哥尔茨的三卷本俄文经典《微积分学教程》为基础。前七卷构成完整《教程》的现代化英文全译本，并按主题重编为二十三章。第八卷为另行编写的配套卷，收录从 N. M. 金特尔和 R. O. 库兹明经典习题集中选取的 2,798 道习题；其记号、术语和顺序均与译著相协调，并附有答案。

本项目旨在把严密数学分析的一项重要传统作为可实际使用的著作呈现给英语读者，而不是制作一部供考古式观赏的影印本。它保留原著的广度、证明、例题、几何洞察和耐心的阐释，同时更新数学英语、记号、编排、版式、图形、公式编号和交叉引用。核心各卷的最终源文件共含 233 个不同的图形资源；《译者序》说明，这些插图是依据其数学内容重新制作的，并非以扫描图形式插入。人工智能协助完成技术性和重复性任务，而一切实质性的数学与编辑决定仍由译者兼编辑负责。下文完整收录的《译者序》全面说明了本项目所投入的人工工作。

本文把该项目置于菲赫金哥尔茨的生平、1947–1949 年俄文《教程》的出版史与接受史，以及该书后来的国际传播之中加以考察。文章说明原三卷本与七卷英文核心版之间的对应关系，把一个具有代表性的俄文段落与现代化版本作比较，并记录项目规模、编辑方法、作者与编辑责任、图形以及预期用途。本文还完整收录七卷核心版所用的《译者序》和第八卷单独撰写的《引言》。

项目概况

项目要素	说明
原著	G. M. 菲赫金哥尔茨，《微积分学教程》，1947–1949 年首次以三卷俄文版出版。
核心版	七卷、二十三章；据本版《译者序》所述，约 2,400 页，并含 233 个不同的图形资源。
配套卷	一卷习题集，共九章、2,798 道习题，含相互配合的复习说明、标明的拓展材料以及每道习题的答案。
编辑模式	完整的现代化英文译本：保留原著数学内容，同时采用当代语言、记号、导航系统、图形和版式。
译者兼编辑	Maksim Sokolov，多伦多塞内卡理工学院数学教授。
出版者	Maxergon School，加拿大多伦多，2026 年。

菲赫金哥尔茨：献身分析学的一生

格里戈里·米哈伊洛维奇·菲赫金哥尔茨（1888–1959；其姓氏也写作 Fikhtengolts 和 Fichtenholz）出生于敖德萨。1905 年，他在当地完成中学教育；1911 年毕业于帝国新俄罗斯大学，对其学术成长影响深远的教师之一是 S. O. 沙图诺夫斯基。他职业生涯早期便把数学、阐释与翻译结合起来：在敖德萨 Mathesis 出版社，他翻译了奥托·焦贝克的解析几何著作，并协助 K. A. 波塞完成埃内斯托·切萨罗一部著作的俄文版。1913 年，他移居圣彼得堡，开始在帝国电工学院任教。后来，他与 J. D.

塔马金合作完成夏尔-让·德·拉瓦莱·普桑 *Cours d'analyse infinitésimale*（《无穷小分析教程》，1922）俄文版第一卷；第二卷于 1933 年出版时，他兼任译者、注释者和编辑。[1]

他在 1913–1917 年间研究实变函数论，尤以含参积分为重点；这项研究形成了他于 1918 年答辩的硕士学位论文。同年，他进入彼得格勒大学（后改称列宁格勒大学），并在那里任教直至生命终点。他的主要研究领域是实变函数论和泛函分析，具体涉及绝对连续性、含参积分、泊松—斯蒂尔切斯积分、依测度收敛、线性运算和函数空间。多年来，他与 L. V. 康托罗维奇共同主持泛函分析讨论班；与其教学有关的学生群体中，包括康托罗维奇、I. P. 纳坦松、S. L. 索博列夫、D. K. 法捷耶夫和 S. A. 赫里斯季阿诺维奇。因此，他的遗产并不限于一本著名教材：它也是列宁格勒分析学派形成过程以及数代数学教育的一部分。[2]

他的教育工作也延伸到大学课堂之外。杰米多夫和彼得罗娃记载，他创建了列宁格勒大学数学分析教研室，并主持至 1953 年；当时他在反所谓"世界主义"运动中被免职，但仍继续在该校任教。他参与国家层面的学校数学课程和教师培养数学课程建设，并于 1934 年发起首届列宁格勒中学生数学奥林匹克竞赛。《教程》应当置于这一更宏大的事业中理解：通过制度、课程与著作的建设，使分析学得以有效传授。

从战前规划到战后《教程》

菲赫金哥尔茨成熟期的《教程》，源于数十年的教学与教材编写。在此之前，他出版了《技术人员数学》（1926）和三册《工程师数学》（1931–1933）。撰写一部基础性微积分巨著的构想历经多年酝酿。1939 年，列宁格勒大学出版社出版了他的《数学分析》第一部分；该书根据他多次为数学专业一年级学生讲授的课程编成。《序言》感谢 N. I. 费尔德曼和 V. P. 巴索夫整理的听课笔记，G. R. 洛伦兹担任编辑。原计划出版的第二部分因第二次世界大战中断项目而未能问世。战后，菲赫金哥尔茨才得以恢复工作并把它重组为定本。国家技术理论文献出版社（Gostekhizdat）于 1947、1948 和 1949 年分别在莫斯科与列宁格勒出版《微积分学教程》三卷。[3]

这一出版时点意义重大。当时，俄罗斯大学分析课程正在吸收魏尔斯特拉斯学派对极限、连续性和严密性的重构，苏联高等教育体系也在重建和扩张。《教程》回应了这一制度需求，却没有缩减为狭窄的课程提纲。在体裁上，它保留了法国大型*traité*（专著式教程）的某些特点：理论、计算、历史评述、几何和应用在连贯的阐述中彼此照亮。菲赫金哥尔茨不仅力求证明结果，也力求展示经典分析的各主要部分如何相互结合。

同时代的评价

第一卷共 690 页，首印 25,000 册。V. V. 涅梅茨基 1948 年的书评之所以珍贵，恰在于它既不是出版社的宣传稿，也不是毫无保留的赞誉。涅梅茨基对若干选择提出质疑：例如以旧术语*varianta* 指称有序变量、对算子的强调不足，以及若干局部与整体问题的处理方式。但他认为本书表述极易理解，赞扬作者在教学和科学方面的驾驭能力，特别指出其中的物理与力学例题以及若干精巧的处理，并预言该书将获得更广泛的认可。这篇书评展示的，是一本进入当时学术争论的鲜活教材，而不是一部仅在后世才被奉为经典的著作。[4]

康托罗维奇和纳坦松在 1959 年的讣告中进一步评价完整《教程》是一部卓越的数学分析论著，着重肯定其完整性、严密性、清晰性、文学品质、历史材料，以及它通向积分方程、实变函数论和

[1] S. S. Demidov 与 S. S. Petrova，"20 世纪上半叶 G. M. 菲赫金哥尔茨与俄罗斯的数学分析教学"，*Chebyshevskii Sbornik* 20:3 (2019), 437–452；书目记录与全文见 Math-Net.Ru。

[2] L. V. Kantorovich 与 I. P. Natanson，"格里戈里·米哈伊洛维奇·菲赫金哥尔茨"，*Uspekhi Matematicheskikh Nauk* 14:5(89) (1959), 123–128；书目记录与全文见 Math-Net.Ru。

[3] 该书的出版过程见 Demidov 与 Petrova，第 445–447 页。原始出版顺序也独立记载于康托罗维奇和纳坦松 1959 年讣告所附书目，以及 Math-Net.Ru 书目数据库。

[4] V. V. Nemytskii 对 G. M. Fikhtengol'ts，*Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniia* 第 I 卷的书评，*Uspekhi Matematicheskikh Nauk* 3:4(26) (1948), 181–183；全文见 Math-Net.Ru。

泛函分析的路径。这些特点说明，与其把这部俄文著作称为常规的初级微积分教材，不如把它描述为一部全面的经典分析教程。

规模、内容与国际传播

俄文卷次	首版年份	主要范围
I	1947	实数；极限；一元函数；导数与微分；函数的定性研究；多元微分学；雅可比行列式；几何；函数延拓。
II	1948	不定积分与定积分；应用；数项级数与函数项级数；反常积分；含参积分；无穷乘积；渐近方法与发散级数方法。
III	1949	曲线积分、二重积分、曲面积分、三重积分与多重积分；有界变差与斯蒂尔切斯积分；向量分析；傅里叶级数、积分与变换；广义极限理论。

如此广泛的范围，说明了本书为何能够长期作为参考书发挥作用。欧拉—麦克劳林求和、无穷乘积、渐近展开、斯蒂尔切斯积分、傅里叶变换和广义极限理论等通常被划入后续课程的主题，在这里仍与产生它们的基础微积分相联系。历史注释揭示思想的发展；详尽的例题则帮助读者为独立解题作准备，尽管《教程》本身并不是按习题手册的形式编排的。

这部著作后来的传播情况格外清晰可见。德文、波兰文和中文均出版过全译本或节译本。一份波兰书目记录了第十二版；高等教育出版社列有中文版第八版，并说明了三卷本的范围。俄罗斯机构书目则列出第一卷和第二卷于 2025 年和 2026 年出版的第十九次影印版。这些记录不能证明每位读者都以相同方式使用本书，但足以证实它跨越不同语言和世代持续出版。[5]

《教程》的篇幅远大于菲赫金哥尔茨后来另行出版的两卷本《数学分析原理》。一些俄语读者把完整著作非正式地称为“大菲赫金哥尔茨”（*Bol’shoi Fikhtengol’ts*），以示区别。英文项目名称保留了这种区分；它并非声称菲赫金哥尔茨此前从未有过篇幅较短的英文著作问世。

新版的贡献

本项目解决两个彼此独立的问题。第一，尽管篇幅较短的《原理》和一些经改编的选材曾以英文出版，完整三卷本《教程》此前从未有过英文全译本。第二，如果逐字复制 20 世纪中叶的术语、记号、编号、图形和编排惯例，就会给当代读者造成原本可以避免的障碍。

因此，本版同时遵守两项承诺：数学内容完整，呈现方式现代化。译者所作的结构性比较表明，原有材料约有 99.9% 得到保留。思想、证明和例题的支配性顺序及其深度均得以保存；只有确实过时的材料才被删除。增补用于澄清论证、揭示隐含联系、弥补表述困难，或使术语与教学法同当前实践一致。

现代化处理也延伸到版本的整体架构。原三卷本按主题重编为七卷篇幅便于使用的核心卷。节与公式的编号已经重建，交叉引用网络经过重构，记号也得到统一。《译者序》还说明，所收录的每幅图像和示意图都是依据其数学内容重新制作的，而不是从扫描件复制。最终成果旨在成为一部当代教材和参考书，同时仍可清楚辨认为菲赫金哥尔茨的著作。

[5] 见 波兰学术图书馆记录、高等教育出版社书目，以及鲍曼莫斯科国立技术大学关于 第一卷和 第二卷的记录。

原著与现代化版本比较的依据

本文的比较，把可以直接核查的内容与译者报告的内容区分开来。2026 年最终 LaTeX 源文件已分别对照第一卷（Nauka，1969）、第二卷（Fizmatgiz，1959）和第三卷（Fizmatgiz，1960）的数字化俄文版核查。这些扫描件是后来的俄文版，而非 1947–1949 年的初版印本；但它们保留了已经确立的俄文结构，可作为核查目录、各节顺序、术语、例题和代表性段落的实际依据。[6]

由此得到的比较验证了结构重映射，并说明了编辑方法；它并不是对约 2,400 页英文文本重新作出的逐行校勘。关于原有材料约有 99.9% 得到保留的陈述，是译者针对整个项目作出的结构性结论，已在下文《译者序》中重现。不应把它误解为 Internet Archive 或本文所引外部历史资料所作的独立认证。

从三卷俄文版到七卷核心版

俄文版划分	THE GRAND CALCULUS 划分	内容的连续性
第一卷：实数《引言》、第 I–VII 章及补编“函数延拓”	第 1–2 卷；现代编号第 1–9 章	无编号的引言成为第 1 章。俄文版七章成为第 2–8 章，补编（第 257–262 节）成为第 9 章。
第二卷：第 VIII–XIV 章	第 3–5 卷；现代编号第 10–16 章	积分学、级数、反常积分和含参积分保持原有顺序，但分为三卷便于使用的主题卷。
第三卷：第 XV–XX 章及补编“极限的一般观点”	第 6–7 卷；现代编号第 17–23 章	几何积分与多重积分构成第 6 卷。傅里叶分析构成第 21–22 章，补编（第 752–762 节）成为第 23 章“广义极限理论”。
独立的习题集	第 8 卷配套卷	2,798 道习题取自金特尔和库兹明，而非菲赫金哥尔茨的《教程》；它们与七卷理论文本相协调，但不改变该文本。

[6] 用于比较的数字化俄文版本：第一卷、第二卷和 第三卷。

现代化处理改变了什么，又保留了什么

项目	俄文《教程》	2026 年版
数学顺序	从实数出发，经极限、微积分、积分、级数、多重积分，直至傅里叶分析的连贯进程。	保留相同的进程、支配性证明、例题和深度；实体分卷界限有所改变，但概念顺序不变。
语言	20 世纪中叶的俄文文体与术语，包括一些无法自然对应于当代数学英语的特定历史术语。	采用地道的数学英语；凡字面表达会遮蔽含义之处，不保留直译。七卷统一使用标准术语。
定义与记号	严密的文字定义，采用俄文版当时的记号与阐释习惯。	在有助于理解之处采用现代符号和集合记号，在若干定义中明确写出量词形式，统一使用 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$，并在旧惯例可能引起误解之处增加说明。
编排	三卷大型实体书：无编号的实数引言、二十个编号章，以及分别论述函数延拓和极限一般观点的补编。	七卷主题核心版、二十三个编号章，另配一卷由其他作者材料编成的习题集。
导航	印刷版的节和公式编号与原分卷绑定；采用页码型和局部引用。	重建节与公式编号，使用卷次感知型引用、超链接、书签、索引以及重构的交叉引用网络。
图形	融入历次俄文版的印刷线图。	最终源文件含 233 个不同的图形资源。《译者序》说明，插图依据其数学内容重新绘制，采用现代线条、分辨率和字体，而不是插入扫描件；本文稍后重现的拉格朗日余项图，其直接样本比较证实了这种方法。
编辑增补	菲赫金哥尔茨本人的阐释和历史注释。	偶尔增加解释、术语说明和衔接材料，以辅助原文；在版式上不把它们分隔为第二层编辑文本。
内容保留	作为支配性来源的俄文原著。	《译者序》报告结构性保留率约为 99.9%；仅省略被判断为确实过时的材料。该百分比来自译者的核查，并非外部文本统计。
制作方法	20 世纪常规印刷排版。	原生数字 LaTeX 排版。AI 协助转录、起草、编码和一致性检查；Maksim Sokolov 作出并承担实质性数学与编辑决定的责任。

代表性比较：现代化处理的实际做法

以下例子有意选择为具有代表性而非穷尽一切。它们记录不同尺度上可见的编辑决定；这并不意味着每个句子都被改写、每个定理都被重新证明，也不意味着本文对全书逐行进行了独立校勘。

极限理论的开篇提供了一个具体例子。俄文第一卷第 22 节从变量的物理观念出发，继而引入一个有序数表，并沿用夏尔·梅雷的术语，把取这些值的变量称为*varianta*。第 23 节用熟悉的 epsilon 条件定义其极限。2026 年版保留了原有例子——等差数列与等比数列、内接多边形的周长，以及 $\sqrt{2}$ 的十进制近似——也保留了 epsilon 定义。

然而，表述围绕现代对象——数列——重新构建。新版区分离散变量与连续变量，把数列描述为有序数表，并在注释中把它描述为函数 $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$。极限定义还以量词记号单独陈列，明确写出依赖关系 $N = N_\varepsilon$。历史术语“无穷小”得到保留，同时为当代读者补充“零数列”一词，并提醒不得把单个非零项视为无穷小。

开篇的基础部分提供了一个更大尺度的增补说明。俄文第一卷的目录从讨论线段测量的第 21 节直接进入第 22 节极限理论。2026 年版保留这两节原有材料的内容和顺序，却扩展了二者之间的过渡：在对应第 21 节的材料之后、对应第 22 节的材料之前，插入两节具有独立标题的新桥接内容。第一节定义可数集与不可数集，枚举 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Q}$，用康托尔对角线论证证明 $(0, 1)$ 不可数，并给出 $(0, 1)$ 与 $\mathbb{R}$ 之间的一个双射。第二节介绍偏序与全序、群、域，并给出把 $\mathbb{R}$ 描述为完备阿基米德有序域的简明现代说法。这些增补把许多当代课程默认学生已知的抽象背景，放在其首次发挥作用的位置加以说明；它们并未取代菲赫金哥尔茨对实数的构造。

同一比较还揭示了两个不同尺度的增补。在原第二卷第 263 节，不定积分写作 $\int f(x)\,dx = F(x) + C$。现代化版本增加了明确的集合解释 $\{F + C : C \in \mathbb{R}\}$，从而避免后来把不定积分之间的恒等式误读为单个函数之间的等式。

第 23 章提供了大尺度的例子。原俄文第三卷以一篇十九页的广义极限补编结束（第 631–649 页，第 752–762 节）。新版完整保留了这一编号序列及其原有论证路线，同时在第 752 节与第 753 节之间插入第 752a 节。这个预备节介绍度量、球、邻域、聚点、拓扑和等价度量，并加入现代的限定说明：在任意拓扑空间中，序列不足以刻画所有极限过程。在保留的各节中，有序变量的历史理论进一步与严格序、预序、有向集、网与 Moore–Smith 收敛、子网、滤子、豪斯多夫空间以及紧致性的网刻画明确联系起来。若干结果按现代分析所要求的假设表述：例如，网极限的唯一性与豪斯多夫条件相联系，而当该条件缺失时，以平凡拓扑给出反例。因此，本章保留菲赫金哥尔茨的框架，同时把它发展为一篇更完整的当代广义极限导论。

在现代记号能为经典讨论中已经存在的思想提供有用名称之处，新版便引入这种记号。讨论全局极值时，第 139 节增加了集合值的 $\arg\max$ 与 $\arg\min$ 定义，以区分极值取得的点和极值本身。第 140 节继而保留经典优化应用，并增加一个统计例子：在 n 次伯努利试验中观察到 s 次成功，对二项似然函数求导即可得到最大似然估计 s/n。这说明了《译者序》中报告的更广泛编辑原则：可以删除被判断为确实过时的材料，同时在新例子能够把经典方法与当代语言或应用联系起来时予以增补。

在七卷核心版中，同一方法还体现为更小的干预。历史性或局部性的名称被标准英文数学术语取代，或与之并列；不时增添注释，以补充语境、警示、定义域限制或缺失的中间说明；某些定理陈述和证明则通过明确写出假设与极限运算而得到加强。所有编号公式均已重新编号，各节引用重建为卷次感知型系统，整个交叉引用网络也得到重构和核查。与重绘图形、超链接、书签和索引结合后，这些改变既使论证的阅读方式现代化，也使读者更便于核验某一结果在全套书其他位置的使用情况。

源文件层面的结构性核查发现，继承的第 1 节至第 762 节在现代核心版中各恰好出现一次，序列没有缺漏；第 752a 节是唯一单独编号的插入节。这验证了上文概括的章、节重映射。但仅凭这一点，并不能确立《译者序》中较广泛的 99.9% 保留率估计；后者需要逐行进行批判性校勘。

这些样本显示了支配性的编辑模式。数学内容、例题和论证路线依然清晰可辨；概念语言、记号和局部解释则经过重建，使英语读者能以当代分析学的表达方式接触这些材料。因此，本版既不是影印本，也不是逐字的文献性翻译，而是一个公开说明其来源关系、供实际使用的现代化版本。

作者与编辑责任

个人或出版品牌	角色	职责范围
G. M. 菲赫金哥尔茨	原作者	第 1–7 卷的支配性作者；这些卷完整翻译并现代化处理了《教程》。
Maksim Sokolov	译者兼编辑	第 1–7 卷的英文翻译、编辑工作、数学审校、排版、设计及最终责任。
N. M. 金特尔与 R. O. 库兹明	第 8 卷的来源作者	配套习题所选编并改编自的经典习题集作者。第 8 卷不属于菲赫金哥尔茨原《教程》。
Maksim Sokolov	第 8 卷译者兼编辑	选编、翻译、重组、改编、与核心各卷协调及排版。
Maxergon School	出版者	2026 年英文版的出版者与出版品牌。

人工智能被用作技术工具，协助完成初稿、转录、LaTeX 编码、交叉引用检查、一致性检查以及其他重复性任务。它并不决定翻译的含义、证明的有效性、版本结构或增删内容的实质。如下文完整《译者序》所述，实质性的判断与责任仍由译者兼编辑承担。

$7+1$ 卷本的架构

卷	书名	章	ISBN
1	*实数、极限与微分学*	1–5	978-1-7380649-3-9
2	*多元微分学与几何*	6–9	978-1-7380649-4-6
3	*积分学的方法与应用*	10–12	978-1-7380649-5-3
4	*数项级数与函数项级数*	13–14	978-1-7380649-6-0
5	*反常积分与含参积分*	15–16	978-1-7380649-7-7
6	*曲线积分、曲面积分与多重积分*	17–20	978-1-0679668-1-2
7	*傅里叶级数、积分与变换*	21–23	978-1-7380649-9-1
8	*习题*（配套卷）	本卷 1–9	978-1-0679668-0-5

下文完整《译者序》中的各章说明，展示了全套内容如何从实数与极限，依次发展到一元与多元微分学；不定积分、定积分、反常积分和含参积分；级数；曲线积分、曲面积分和多重积分；傅里叶分析；以及使用有向序、网、滤子和广义上极限与下极限的广义极限理论。

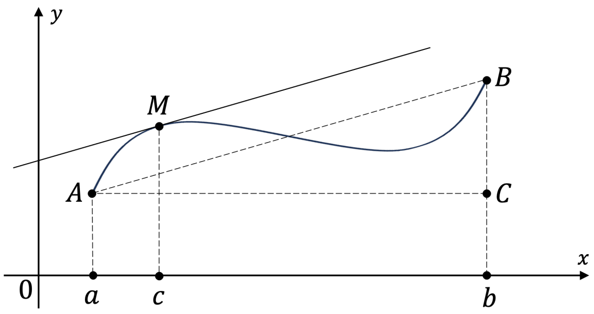
习题配套卷详述

第 8 卷是一部与主著相协调的练习用书，而不是菲赫金哥尔茨理论阐述的续篇。每一节都回指相关的核心章节。超出核心版论述范围的问题标为“拓展”，并在本卷局部给出作答所需的定义或公式。全部 2,798 道习题均附答案；这些是答案表，并不声称每道题都给出完整的详解。

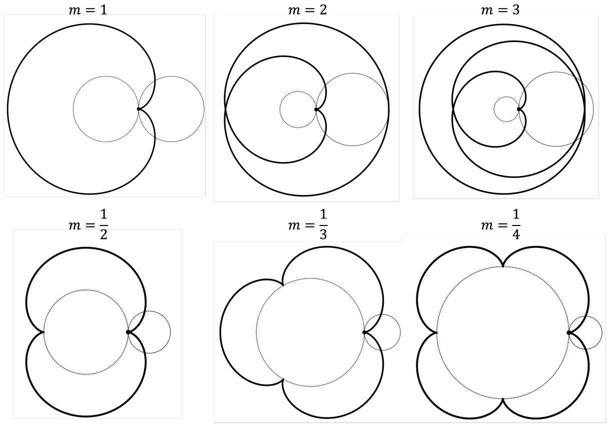
章	主题	习题数
1	极限	168
2	微分	417
3	微分学在分析中的应用	429
4	不定积分	460
5	定积分及其应用	206
6	多重积分、曲线积分与曲面积分	365
7	高等定积分	414
8	无穷级数	234
9	数值积分与级数方法	105
	合计	**2,798**

重新制作的数学图形

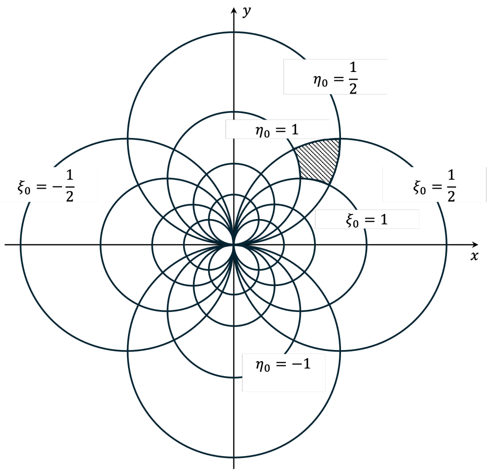
原插图并未以扫描图形式插入，而是依据其数学内容重新绘制，以统一线宽、标注、分辨率和版式整合。随后两页的七个例子，范围从基础微分学延伸到空间几何、曲面积分、热传导、傅里叶分析和工程应用。第二幅图版特意选取全套书不同部分中信息密度较高的图形。



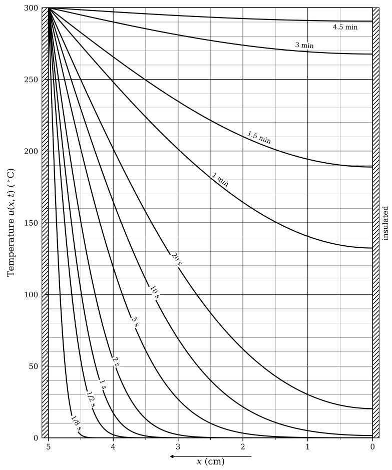
A. 拉格朗日中值定理的几何解释 （第 1 卷）。



B. 一族外摆线 （第 2 卷）。

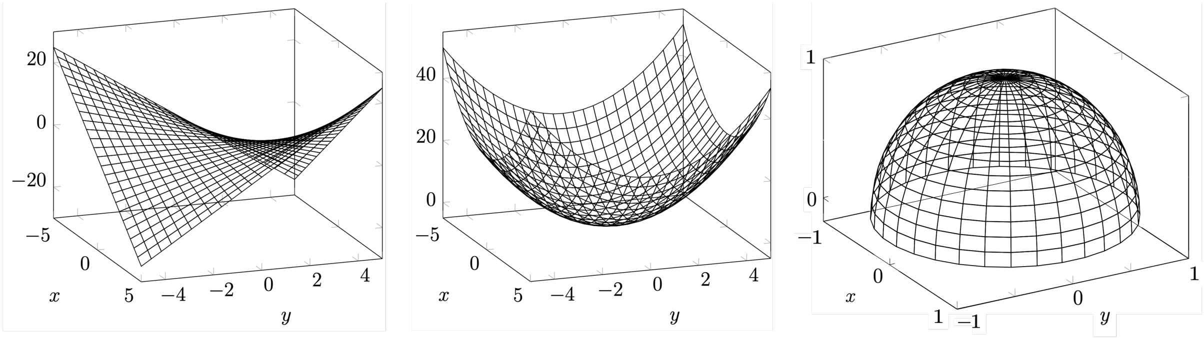


C. 一个变量代换例题中的坐标曲线
（第 6 卷）。

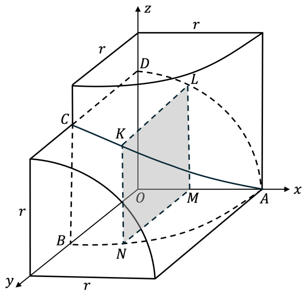


D. 傅里叶级数热方程解所给出的温度分布
（第 7 卷）。

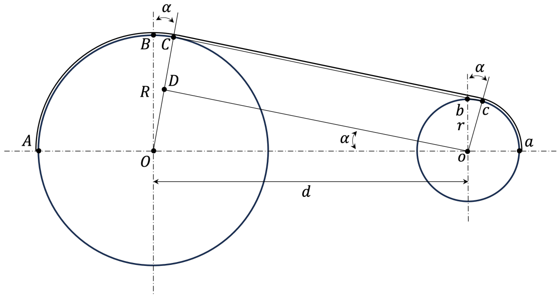
图 1: *为现代化版本重新制作的代表性图形。*



F. 二元函数的三个空间图像：双曲抛物面、旋转抛物面与半球面
（第 2 卷）。



E. 由相互垂直的圆柱形成的施泰因梅茨立体的一个卦限
（第 3 卷）。



H. 工程近似中绕过不等滑轮的皮带几何
（第 1 卷）。

图 2: *空间几何、多重积分与工程力学中更为复杂的例子。*

全套书的使用方式

- **作为主课程教材或自学读本。** 全书严密而全面，提供动机、中间论证、例题和几何解释，其展开规模在更精练的论述中并不常见。
- **作为精练现代分析教材的配套读物。** 使用鲁丁、佐里奇或其他简明教材的读者，可以到菲赫金哥尔茨处查阅详尽计算、图形、例题和通向同一思想的不同路径。
- **作为参考书。** 按主题划分的七卷结构和重建的交叉引用系统，使读者可以查阅某一主题，而无需携带原来整套三卷实体书。
- **用于练习。** 第 8 卷遵循核心版的记号和顺序，因而读者可以从理论章节直接进入大规模、分级编排的习题集，再查阅其答案表。

易于理解不应与初等水平混为一谈。本套书的目的，是清楚解释高难度数学，而不是降低其要求。它最适合认真学习的本科生和研究生、教师、数学工作者，以及寻求广博经典分析论述的独立读者。

权利、地域与获取

本版 2026 年 7 月的地域声明指出，其所依据的俄文著作在加拿大、日本、新西兰、印度、南非、香港特别行政区和大韩民国已进入公有领域，并说明完整的 $7+1$ 卷版本拟在这些司法管辖区发行。该声明已在下文两个原始文本部分中逐字重现。

2026 年英文翻译、改编、现代化处理、编辑材料、排版、图形与设计，另由 Maksim Sokolov 和 Maxergon School 享有版权。原著在某一司法管辖区进入公有领域，并不意味着这一新版英文版本也进入公有领域。本文面向国际读者介绍该项目；完整各卷的供应仍受地域声明和适用法律约束。在有授权发行的地区，读者可以使用上表 ISBN 识别授权版本。

随着在其他地域依法取得必要权利，各卷将通过授权渠道在这些地域发行。在完成这种法律许可之前，不表示该地域已经可以购买或获取这些卷册。

第二部分

完整《译者序》

全文重录自第 1 卷

《译者序》的正文与脚注均完整收录，未作删节。八卷内容概览作为适用于整个项目的中性列表呈现，不附属于某一卷的标签或边框。

译者序

关于“The Grand Calculus”

呈现在读者面前的七卷本*The Grand Calculus*，是 G. M. 菲赫金哥尔茨三卷本巨著《微积分学教程》（下文简称《教程》）完整的现代化英文译本[7]。本版同时作出了两方面的贡献：既把完整的《教程》呈现给英语读者，又使这部著作以完全适应当代数学学习的形式问世。前者通过翻译实现，后者通过现代化处理实现。无论哪一方面，都不是靠删减或简化原著来完成的。现有的核心七卷约 2,400 页（另加约 500 页的第八卷配套习题集）。*The Grand Calculus* 保留了原著的规模、内容、深度、思想发展脉络、证明、例题以及鲜明的阐释风格；同时对表述方式、记号、编排、插图和交叉引用系统作了现代化处理，使之符合当代微积分论著的规范。

这种现代化处理立足于一部从未失去实用价值的著作。俄文《教程》问世七十五年有余，至今仍被积极用作教材和参考书——这或许是对其持久的数学力量与教学价值最有力的证明。然而令人费解的是，《教程》此前从未有过完整的英文译本。因此，为使英语国家和地区的学生与教师能够使用它，翻译势在必行。现代化处理同样必要，因为其中某些方面不可避免地需要修订。

《教程》原来的三卷俄文版现已重编为*The Grand Calculus* 的七卷核心卷。这七卷的分卷界限由学科内容本身决定，使各卷都便于阅读、教学和查阅。形式虽有改变，著作的数学本质未变。

The Grand Calculus 的七卷核心卷另配有一卷完全由问题和习题构成的第八卷（共含 2,798 道习题）。前七卷呈现菲赫金哥尔茨对数学分析的系统阐述，而这部配套卷则取材于金特尔和库兹明享有盛誉的习题集；其中层次分明、数学内容丰富的习题，数代以来一直是分析学习者的经典资源。所选习题经过翻译、重组和改编，以与*The Grand Calculus* 全套采用的记号、术语及课题顺序保持一致。

原《教程》及其影响

菲赫金哥尔茨撰写过两部重要的数学分析教材：完整的三卷本《教程》和篇幅较短的两卷本《数学分析原理》。俄语学生数代以来一直把较大的那部著作非正式地称为“大菲赫金哥尔茨”（*Bol’shoi Fikhtengol’ts*），以区别于较短的著作。书名*The Grand Calculus* 将这一传统称呼带入英语，并表明本版所据的是完整的三卷本著作。

《教程》的崇高地位早已得到公认。L. 康托罗维奇和 I. 纳坦松曾这样评价它[8]：“……就完整性、严密性、清晰性和文字技巧而言，这是世界数学文献中最优秀的数学分析论著之一。”

S. 杰米多夫和 S. 彼得罗娃写道[9]：“……这部屡经再版的三卷著作，在数学家的书架上占有令人尊敬的位置——他们翻阅它，是为了领会分析学各个课题的细微之处，或只是重温这些内容；也常常是为了深入研究此前一直处于其兴趣边缘的问题。”

《教程》被译成多种语言，为许多国家数代学生所使用。今天，人们仍在使用它；它并非仅仅是一部历史经典，而是一本实际使用的教材和参考书，并且常与其他著作配合使用。它之所以经久不衰，在于严密、完整、富于几何洞察、例题和插图丰富，以及耐心而亲切的阐述方式这一罕见结合。对于较精练的教材往往留给读者自行补足的动机和中间论证，菲赫金哥尔茨都会加以说明。由

[7]更准确地说，这是一套“$7+1$”卷本：核心七卷完整翻译并现代化处理了菲赫金哥尔茨的《教程》，另有第八卷配套习题集，其中收录了从金特尔和库兹明的经典习题集中精心选编并改编的习题。更详尽的说明见本序下文。

[8]L. V. Kantorovich and I. P. Natanson, “Grigorii Mikhailovich Fikhtengol’ts,” *Russian Mathematical Surveys*, 14:5(89) (1959), 123–128（俄文）。

[9]S. S. Demidov and S. S. Petrova, “G. M. Fikhtengol’ts and the Teaching of Mathematical Analysis in Russia during the First Half of the Twentieth Century,” *Chebyshevskii Sbornik*, 20:3 (2019), 437–452（俄文）。

此形成的著作在数学上内容厚重，却又格外易读；其最出色之处，是全书持续展开学科内容，具有数学小说般的连贯性。

如前所述，在本版之前，完整的《教程》从未有过英文版。菲赫金哥尔茨较短的《数学分析原理》虽曾以英文出版，但那是一部大幅缩略且本质上不同的著作。*The Grand Calculus* 填补了这一长期存在的空白。

使用建议

不能因为菲赫金哥尔茨的著作易于理解，就把它误认为初等或入门性的论述。该书严密、全面而且要求很高。它较易理解，是因为解释得更多，而不是因为要求得更少。*The Grand Calculus* 内容足够完备，可以用作主教材；但它最突出的优势之一，是可作为现代主教材——尤其是论述精练或抽象的教材——的配套读物。

特别自然的搭配，是沃尔特·鲁丁的《数学分析原理》[10]或 V. A. 佐里奇的两卷本《数学分析》[11]。两者都从现代、严密且概念统一的视角呈现分析学，但其抽象而精练的风格会使初读者感到困难。菲赫金哥尔茨提供了详尽的计算、图形、动机、大量例题和中间步骤，使读者能够看到理论如何实际运作。

对于希望通过更多练习巩固掌握程度的学生，最自然的配套资源是*The Grand Calculus* 第八卷；这是一部专门编写的习题集，其记号、术语和交叉引用系统均与七卷主著相衔接。希望获得更多习题的读者还会发现两种经典资源特别有价值：B. P. 杰米多维奇的《数学分析习题集》[12]以及 W. J. Kaczor 和 M. T. Nowak 的三卷本《数学分析习题集》[13]。这些著作合在一起，构成了大量习题资源，能够极好地补充本版。

翻译方法

翻译一部经典数学著作，需要先确定翻译的目的。

一种做法是制作文献性译本，尽可能严格地保留原著的措辞和惯例。这类译本具有历史与文献价值，但也不得不保留那些可能已经成为当代读者障碍的术语、记号、编排和阐释习惯。

另一种做法，是在保留著作的数学内容、结构和作者个性的同时，使其能够以当代数学英语表述自身。

The Grand Calculus 采用第二种方法。它不是逐字或逐行的译本。凡直译会使表达显得生硬、使数学含义变得模糊，或复制已经不再具有实际用途的惯例之处，都没有保留字面措辞。同时，现代化处理始终受一项严格原则支配：它必须在不简化、不删节的前提下改进著作。原《教程》始终是支配全书的来源。

另一种合理的方法，是标出每一处改动或增补，使读者能够区分原文和每一次编辑干预。我曾考虑过这种方法，但没有采用。现代化处理贯穿全书——体现在措辞、术语、记号、编号、图形、交叉引用、解释和偶尔的增补中。若逐一标出，就会一页又一页地打断数学论述的连贯性，把一本实用教材变成分层的校勘版。因此，英文文本以一个连贯统一的整体呈现。菲赫金哥尔茨原著始终支配核心七卷，但翻译与现代化处理并未在版式上分层标示。

---

[10] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 第 3 版（McGraw–Hill, 1976）。

[11] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis I*, 英文第 2 版，Roger Cooke 和 Octavio Paniagua Taboada 译，Universitext（Springer, 2015）；以及 *Mathematical Analysis II*, 英文第 2 版，Roger Cooke 和 Octavio Paniagua Taboada 译，Universitext（Springer, 2016）。

[12] B. P. Demidovich, *Problems in Mathematical Analysis*, G. Yankovsky 俄译英（Mir Publishers, Moscow, 1970）。

[13] W. J. Kaczor and M. T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis I: Real Numbers, Sequences and Series*, Student Mathematical Library, Vol. 4（American Mathematical Society, 2000）；*Problems in Mathematical Analysis II: Continuity and Differentiation*, Student Mathematical Library, Vol. 12（American Mathematical Society, 2001）；*Problems in Mathematical Analysis III: Integration*, Student Mathematical Library, Vol. 35（American Mathematical Society, 2003）。

现代化处理的范围

以下讨论涉及对菲赫金哥尔茨《教程》的现代化处理；该《教程》构成*The Grand Calculus* 的核心七卷。

支配性原则是保留，而不是压缩。本版并非节本。与俄文原著所作的结构性比较表明，原有材料约有 99.9% 得到保留。思想顺序、主要证明、例题和特有的深度均被保留。只有确实已经过时的材料才被删除。增补仅在以下情况下作出：澄清论证、把隐含联系明确化、解决表述困难，或使论述符合当代术语、记号与教学法。对于读者和数学家长期以来在网络论坛中提出的意见，也作了考虑。最终成果在绝大部分内容上仍然是菲赫金哥尔茨；新增材料起到辅助原著而非取代原著的作用。

《教程》的七卷编排是按主题划分的，而不是机械切分。为便于查阅，节编号系统已经重建。所有有编号的公式均按现代标准重新编号，整个交叉引用网络也经过重构和核查。我依据原著所表达的数学内容，使用现代图形技术重新绘制了图表、示意图和插图。旧图并非简单扫描，而是为当代数字版本重新制作。术语和记号得到统一，版式则以适合长时间舒适阅读为目标进行设计。

凡原著已经显得陈旧之处，本次现代化处理都相当广泛；其他地方则有意保持克制。

技术与编辑责任

人工智能（AI）的革命，使一个译者独力完成如此规模的项目成为可能，也使我确信着手进行这一项目的时机已经到来。作为技术工具，AI 不可或缺：它协助完成初稿、转录和 LaTeX 编码、交叉引用与一致性检查，以及许多其他重复性工作。没有这些工具，一个人实际上不可能以这种形式完成整套版本。

然而，AI 并未取代数学判断或编辑判断。即使借助 AI，本版仍需要三年持续、几乎每日进行的人工工作，才能完成全书的审阅、纠正、整合、重写、核验和统一。对于含义、术语、证明、编排、增补、删减与呈现方式方面的一切实质性决定，均由我作出。每一阶段都由人的数学审视所支配，最终文本的责任由我承担。

发行地域

截至 2026 年 7 月，现行“$7+1$”卷版本所依据的俄文著作——构成七卷核心著作的菲赫金哥尔茨《教程》，以及构成第八卷配套习题集的金特尔—库兹明习题集——在加拿大、日本、新西兰、印度、南非、香港特别行政区和大韩民国均已进入公有领域。因此，完整的“$7+1$”卷*The Grand Calculus* 目前拟在上述司法管辖区发行。

致谢

我谨向斯韦特兰娜·涅哈伊教授（塞内卡理工学院）和阿尔马兹·布塔耶夫教授（弗雷泽河谷大学）表示深切感谢，感谢他们给予周到的反馈、宝贵的建议和专业见解。

Maksim Sokolov
加拿大多伦多
2026 年 7 月。

八卷内容

“$7+1$”卷结构遵循《教程》的主题发展：

第 1 卷 [第 1–5 章]

第 1 章：实数。 从有理数和无理数出发构建实数系，包括序、算术运算、完备性以及十进制表示。

第 2 章：极限理论。 介绍数列与极限、极限运算法则、单调收敛、子列以及博尔扎诺—柯西理论。

第 3 章：一元函数。 论述函数、函数极限、无穷小量与无穷大量、连续性、间断点以及连续函数的主要性质。

第 4 章：导数与微分。 介绍导数与微分、基本中值定理、高阶导数、泰勒公式以及插值法。

第 5 章：利用导数研究函数。 利用导数研究单调性、极值、凸性、图像形状、未定式以及方程的近似解。

第 2 卷 [第 6–9 章]

第 6 章：多元函数。 论述多元函数的极限、连续性、偏导数、微分、高阶导数和极值。

第 7 章：函数行列式及其应用。 研究雅可比矩阵和函数行列式、隐函数与反函数以及变量代换。

第 8 章：微分学在几何中的应用。 把微分学应用于曲线和曲面，包括切线、切平面、密切、弧长和曲率。

第 9 章：函数延拓。 论述函数从区间和平面区域上的光滑延拓，包括边界正则性和延拓定理的应用。

第 3 卷 [第 10–12 章]

第 10 章：不定积分。 介绍有理式、根式、三角式、指数式和椭圆式的不定积分方法。

第 11 章：定积分。 构造定积分，证明其主要性质，发展计算与变换方法，并介绍数值求积。

第 12 章：积分学的应用。 把积分应用于弧长、面积、体积、力学、物理学、工程学和初步微分方程。

第 4 卷 [第 13–14 章]

第 13 章：常数项无穷级数。 论述数项级数、二重级数、无穷乘积、函数展开、近似和求和方法的收敛理论。

第 14 章：函数列与函数项级数。 研究函数列与函数项级数、一致收敛、幂级数、初等复函数和渐近级数。

第 5 卷 [第 15–16 章]

第 15 章：反常积分。 论述无界区间上的反常积分和无界被积函数的反常积分，以及相应的收敛判别法、变换和近似。

第 16 章：含参积分。 研究含参积分、一致收敛、积分号下求导与积分，以及贝塔积分和伽马积分。

第 6 卷 [第 17–20 章]

第 17 章：曲线积分与斯蒂尔切斯积分。 论述第一类和第二类曲线积分、路径无关性与势函数、有界变差函数以及斯蒂尔切斯积分。

第 18 章：二重积分。 论述二重积分、累次积分、格林公式、变量代换以及反常二重积分。

第 19 章：曲面面积与曲面积分。 讨论双侧曲面、曲面面积以及第一类和第二类曲面积分。

第 20 章：三重积分与多重积分。 论述三重积分与多重积分、高斯—奥斯特罗格拉茨基定理、变量代换以及向量分析初步。

第 7 卷 [第 21–23 章]

第 21 章：傅里叶级数。 介绍傅里叶系数与级数、收敛与逼近、傅里叶积分与变换，以及在微分方程和调和分析中的应用。

第 22 章：傅里叶级数（续）。 继续论述傅里叶理论，包括完备性、均方逼近、可和法、逐项运算、唯一性以及狄利克雷问题。

第 23 章：广义极限理论。 利用有向序和网重新表述极限，包括子网、聚点值、滤子，以及广义上极限与下极限。

第 8 卷 [配套卷第 1–9 章]

微积分习题及答案。

第三部分

第 8 卷完整《引言》

全文重录自习题配套卷

第 8 卷引言

习题配套卷

The Grand Calculus 前七卷呈现 G. M. 菲赫金哥尔茨《微积分学教程》完整的现代化英文译本。第八卷是其练习配套卷。书中 2,798 道习题从 N. M. 金特尔和 R. O. 库兹明的经典习题集中选编并改编而来，使读者能够巩固理论、获得技术熟练度，并检验自己对数学分析主要方法的掌握程度。

本卷不延续菲赫金哥尔茨系统的理论阐述，也不属于他的原《教程》。它被设计为七卷主著的有机延伸。因此，选材、措辞、记号、术语、课题顺序和复习引用，在全卷中都与该主著相协调。

本卷的编排方式

习题分为九章，从极限和微分开始，继而讨论积分、多重积分与向量积分、高等积分方法与傅里叶方法、无穷级数，以及数值方法与渐近方法。每一节开头都有简短的复习说明，指出主著中包含该节习题所用理论的卷次与章节。读者在尝试本节习题之前应先查阅这些章节；当某种方法或假设已不再熟悉时，也应回到相应章节复习。

有些习题有意超出第 1–7 卷所发展的理论。它们在节或习题层面标为**拓展**。这种标记表示主卷不预设读者已经学过该主题；尝试解题所需的定义、公式和简要预备事实，均在本卷相应位置给出。复习说明仍然只指出第 1–7 卷中的先修章节。

章编号约定。 第 8 卷各章编号为第 1 章、第 2 章、第 3 章，依此类推。因此，凡只出现章号而不出现卷号者，均指其所在卷内部的章号。配套卷中的每一条复习说明，在引用主著时都会同时给出卷号和章号。

发行地域

截至 2026 年 7 月，现行“$7+1$”卷版本所依据的俄文著作——构成七卷核心著作的菲赫金哥尔茨《教程》，以及构成第八卷配套习题集的金特尔–库兹明习题集——在加拿大、日本、新西兰、印度、南非、香港特别行政区和大韩民国均已进入公有领域。因此，完整的“$7+1$”卷 *The Grand Calculus* 目前拟在上述司法管辖区发行。

关于译者兼编辑

Maksim Sokolov 是加拿大多伦多塞内卡理工学院的数学教授。他拥有数学博士学位和数学硕士学位，以及中学后数学教育方向的教育学硕士学位；自 2005 年起一直在高等教育领域教授数学。

在*The Grand Calculus* 项目中，Sokolov 担任七卷英文版的译者兼编辑。他还选编、翻译、重组、改编并排版了第八卷习题配套卷。

参考文献与来源说明选录

1. G. M. Fikhtengol’ts, *Kurs differentsial’nogo i integral’nogo ischisleniia*［《微积分学教程》］，3 卷（莫斯科—列宁格勒：Gostekhizdat，1947–1949）。
2. 用于比较的数字化俄文版：第一卷，第 7 版（莫斯科：Nauka，1969），Internet Archive 项目 i-1969；第二卷（莫斯科：Fizmatgiz，1959），项目 ii-1959；第三卷（莫斯科：Fizmatgiz，1960），项目 B-001-014-346。
3. L. V. Kantorovich 与 I. P. Natanson，“Grigorii Mikhailovich Fikhtengol’ts”，*Uspekhi Matematicheskikh Nauk* 14:5(89) (1959), 123–128。书目记录与全文：Math-Net.Ru。
4. S. S. Demidov 与 S. S. Petrova，“G. M. Fikhtengol’ts and the Teaching of Mathematical Analysis in Russia during the First Half of the Twentieth Century”，*Chebyshevskii Sbornik* 20:3 (2019), 437–452。Math-Net.Ru。
5. V. V. Nemytskii 对 G. M. Fikhtengol’ts，*Kurs differentsial’nogo i integral’nogo ischisleniia* 第 I 卷的书评，*Uspekhi Matematicheskikh Nauk* 3:4(26) (1948), 181–183。Math-Net.Ru。
6. 记录后来版本与译本的机构资料：鲍曼莫斯科国立技术大学，第一卷；第二卷；波兰学术图书馆记录；以及 高等教育出版社，中文版第一卷。
7. G. M. Fikhtengol’ts, *The Fundamentals of Mathematical Analysis*［《数学分析原理》］，2 卷（牛津：Pergamon Press，1965）。这部较早的英文著作是篇幅较短的《原理》，而不是完整三卷本《教程》。
8. G. M. Fikhtengol’ts, *The Grand Calculus*，第 1–7 卷，Maksim Sokolov 英译并编辑（多伦多：Maxergon School，2026）；另与 N. M. Günter 和 R. O. Kuzmin，*The Grand Calculus* 第 8 卷：*Exercises*［《习题》］，由 Maksim Sokolov 选编、翻译、重组并改编（多伦多：Maxergon School，2026）。

姓名与转写

本版全书使用*Fikhtengol’ts* 这一形式。图书馆目录和早期译本也可能使用*Fichtenholz* 或*Fikhtengolts*；三种形式均指同一位作者。配套卷扉页使用*Günter* 这一拼写；核心卷《译者序》则重现变体*Günther*。

建议引用格式

Sokolov, Maksim. *The Grand Calculus：项目史、编辑方法与范围*。多伦多：Maxergon School，2026 年 8 月。